L'Istituto Primo Levi di Vignola
Scuola-Polo per la formazione dell'Ambito 11 Emilia Romagna

La matematica e la fisica del discreto

Esperto: Andrea Spagni

- Liceo Scientifico «A.F. Formiggini» Sassuolo (MO)
- Docente a contratto per il corso di Fisica I nel corso di Laurea in «Ingegneria Meccatronica» presso il D.I.S.M.I dell'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
- Dall'A.A. 2000-2001 fino all'A.A. 2014-2015 (Didattica della Fisica nei corsi S.S.I.S. e T.F.A.)

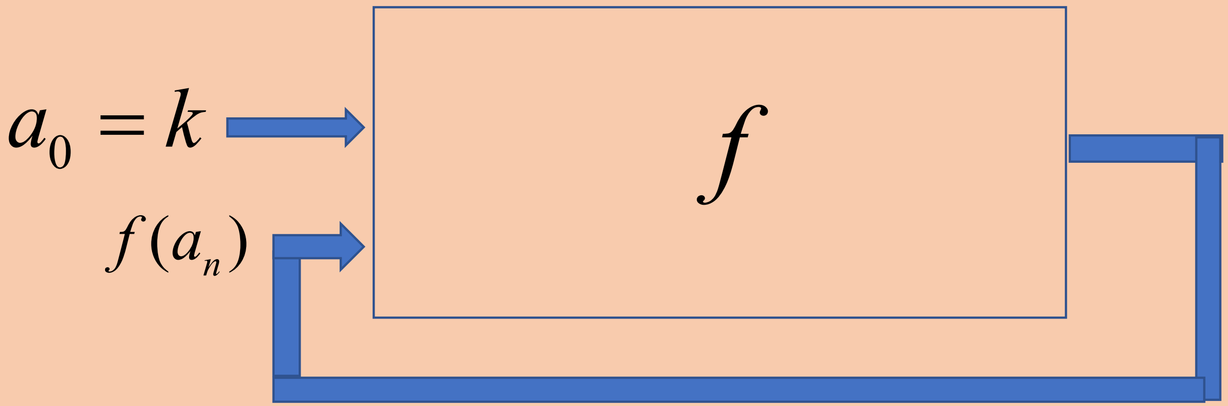
“In matematica è sempre consigliabile arrivare ad un’idea per più strade, per non confondere quest’idea con la strada che ci ha condotti ad essa”

G. Arrigo

Automi «iterativi» (caso discreto)

Nel caso discreto, in cui variabile di ingresso è il un numero , gli automi ciclici realizzano le

successioni date per ricorrenza $\begin{cases} a_0 = k & \text{valore iniziale} \\ a_{n+1} = f(a_n) \quad \forall n \in N & \text{relazione di ricorrenza} \end{cases}$



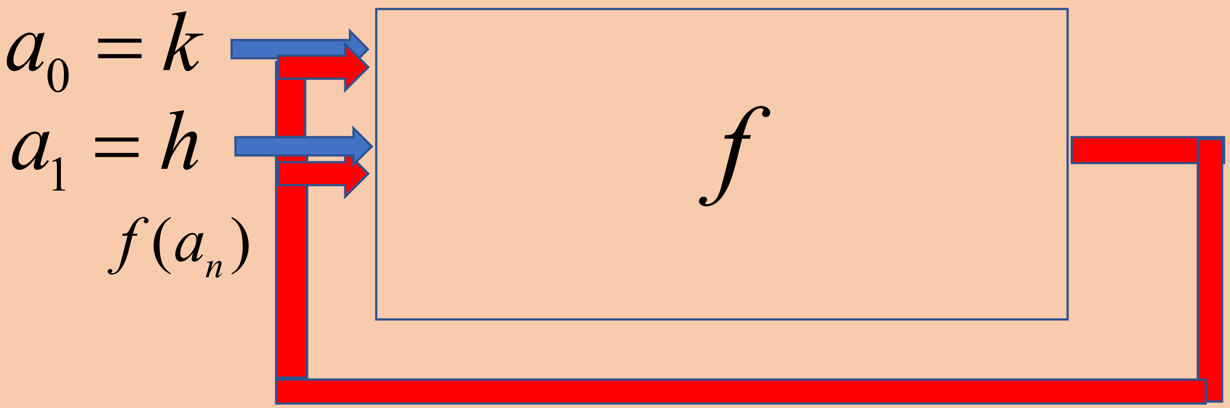
Automi «iterativi» (successioni nelle quali un termine successivo dipende dal valore dei due termini immediatamente precedenti)

Consideriamo le successioni date per ricorrenza, in cui la relazione di ricorrenza è tale che

il termine (n+2)-esimo dipende dal valore dei termini (n+1)-esimo e n-esimo.

$$\begin{cases} a_0 = k & \\ a_1 = h & \qquad \text{valori iniziali} \\ a_{n+2} = f(a_{n+1}, a_n) \quad \forall n \in N & \text{relazione di ricorrenza} \end{cases}$$

Lo schema iterativo «ad automi» potrebbe essere stilizzato nel modo seguente:



Il foglio di calcolo è strutturato in modo tale da consentire una gestione delle funzioni ricorsive estremamente semplice

Automi «iterativi» (successioni nelle quali un termine successivo dipende dal valore dei due termini immediatamente precedenti)

	A	B	C	D
1	n	a_n	a_{n+1}	a_{n+2}
2	0	a_0	a_1	"=f(b2,c2)"
3	1	"=C2"	"=D2"	"=f(b3,c3)"
4	2	…	…	…

Grazie alle possibilità offerte dall'indirizzamento relativo nella colonna D è possibile copiare la funzione che fornisce la relazione di ricorrenza (freccia verde); l'aggiornamento degli input ijn ingresso è fornito dalle frecce rosse

AMBITO 11 primo levi Istituto di Istruzione Superiore vignola

Studio della relazione di ricorrenza $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

Quando la relazione di ricorrenza è lineare (ed omogenea, cioè senza la presenza di n in modo esplicito) , cioè del tipo

$$a_{n+2} = \alpha \cdot a_{n+1} + \beta \cdot a_n \text{ con } \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

esiste una tecnica generale per ricavare la dipendenza esplicita di a_n da n. Applichiamola alla successione data: ipotizziamo che

$$a_n = \lambda^n \quad \text{con } \lambda \in R - \{0\} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} = \lambda^{n+1} = \lambda \cdot \lambda^n$$

$$a_{n+2} = \lambda^{n+2} = \lambda^2 \cdot \lambda^n$$

Sostituiamo alla relazione di ricorrenza $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ per ottenere

$$\lambda^2 \cdot \lambda^n = \lambda \cdot \lambda^n + 2\lambda^n \Rightarrow \lambda^n \cdot \left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = -1$$

Studio della relazione di ricorrenza $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

$$\lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = -1 \text{ } (\Delta>0 \text{ , 2 soluzioni distinte})$$

In teoria entrambe le successioni $\mathrm{a}_n = 2^n$ e $\mathrm{b}_n = (-1)^n$ sono soluzioni dell'equazione iniziale. In pratica esse non lo sono perchè, salvo certi particolari valori di h e k, non soddisfano alle condizioni iniziali della successioni. Tali successioni, però, sono le uniche che soddisfanno alla relazione di ricorrenza

E' facile convincersi (dimostratelo) che allora ogni combinazione lineare delle due soluzioni trovate soddisfa ancora la relazione di ricorrenza, cioè qualunque successione c_n del tipo

$$c_n = c \cdot a_n + d \cdot b_n \quad \text{con } c, d \in R$$

Studio della relazione di ricorrenza $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

$$c_n = c \cdot a_n + d \cdot b_n = c \cdot 2^n + d \cdot (-1)^n \qquad \text{con } c, d \in R$$

Le costanti c e d possono essere determinate imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{matrix} n=0 \\ n=1 \end{matrix} \begin{cases} c + d = a_0 \\ 2c - d = a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{a_0 + a_1}{3} \\ d = \dfrac{2a_0 - a_1}{3} \end{cases}$$

Casi particolari:

$$\text{1) Se } a_1 = -a_0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a_0 \end{cases} \Rightarrow c_n = a_0 \cdot (-1)^n$$

$$\text{2) Se } a_1 = 2a_0 \Rightarrow \begin{cases} c = a_0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow c_n = a_0 \cdot 2^n$$

Studio della relazione di ricorrenza $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Mettetevi alla prova per studiare la famosa successione di Fibonacci $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$

e per dimostrare che, detto F_n l'n-esimo numero di Fibonacci,

$$1)\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \qquad \text{(Formula di Binet)}$$

$$2)\ \text{Per n grandi } F_n \cong \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$3)\ \lim_{n \to +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \text{ che è la famosa "sezione aurea"}$$

Ancora sulle relazioni di ricorrenza lineari ed omogenee

Alcune osservazioni:

1. La teoria è stata sviluppata solo nel caso in cui il delta dell'equazione di 2 grado associata sia positivo
2. Si rimanda ad uno studio dei casi con radici coincidenti e con radici complesse a testi specialistici
3. A ben pensarci la teoria è estendibile anche ad equazione di grado superiore a patto di saper determinare le radici (in particolare si potrebbe affrontare lo studio di successioni in cui il termine a_{n+k} dipende dal valore assunto da k termini precedenti). Ad esempio:

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n$$